

На правах рукописи

Давлетшин Анас Ильгизович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ  
В ЖИДКОСТИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Казань – 2 0 1 0

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте механики и машиностроения Казанского научного центра РАН и в Татарском государственном гуманитарно-педагогическом университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор  
Аганин Александр Алексеевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор  
Егоров Андрей Геннадьевич,

доктор физико-математических наук,  
профессор  
Сидоров Игорь Николаевич.

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук  
Институт механики Уфимского  
научного центра РАН (г. Уфа).

Защита состоится «28» января 2010 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, корп. 2, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «18» декабря 2009 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.081.21  
д. ф.-м. н., доц.

Задворнов О.А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** Физические свойства жидкостей с пузырьками, происходящие в них химические превращения, биологические процессы и т.д. в значительной степени зависят от особенностей взаимодействия между пузырьками. Интенсивность такого взаимодействия увеличивается в акустических полях, где давление жидкости является переменным, вследствие чего пузырьки совершают нелинейные радиальные колебания. В результате взаимодействия радиальные колебания отдельных пузырьков могут усиливаться или ослабляться, пузырьки могут удаляться друг от друга или сближаться, формировать устойчивые структуры (связанные пары, кластеры, стримеры) и т.д.

Существующие в настоящее время математические модели и методы расчета задач взаимодействия пузырьков можно условно разбить на три группы. В первой из них уравнения взаимодействия представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка относительно радиусов взаимодействующих пузырьков, пространственных координат их центров и, в случае несферических пузырьков, амплитуд отклонения формы пузырьков от сферической в виде отдельных сферических гармоник. Решение здесь, как правило, находится численно с применением какого-либо варианта метода Рунге-Кутты с переменным шагом интегрирования по времени. Вторую группу составляют различные варианты метода граничных элементов, а третью образуют методы прямого численного моделирования: конечных разностей и конечных элементов. Каждая группа имеет свои преимущества и недостатки. В частности, подходы первой группы, к которой относятся предлагаемые в настоящей работе модели, более просты и экономичны, но, вместе с тем, и более ограничены, например, из-за более жестких ограничений на величину отклонений формы пузырьков от сферической.

К настоящему времени в рамках первой группы наиболее развитыми являются модели и методы исследования дальнего взаимодействия, когда расстояние между пузырьками относительно велико. В качестве меры близости взаимодействия пузырьков принято считать безразмерный параметр  $\delta = \max_{i,j} [(R_i + R_j)/d_{ij}] < 1$ , где  $R_i$ ,  $R_j$  – радиусы пузырьков,  $d_{ij}$  – рассто-

яние между их центрами ( $i \neq j$ ),  $i, j = 1, 2, \dots, K$ ,  $K$  – общее количество взаимодействующих пузырьков. Изучение дальнего взаимодействия было начато еще в конце 19 века. С тех пор получено много теоретических и экспериментальных результатов. Теоретические исследования проводились, в основном, с применением математических моделей второго порядка точности по  $\delta$ . Для адекватного описания наблюдаемых экспериментально кластеров и стримеров такой точности недостаточно, поскольку расстояние между пузырьками в этих структурах может быть меньше, чем при дальнем взаимодействии. Сравнительно недавно были разработаны модели, имеющие относительно  $\delta$  третий и четвертый порядки точности. Но и их точности может оказаться недостаточно из-за того, что для контроля достоверности результатов решение  $n$ -го порядка точности нужно сравнивать с решением  $(n + 1)$ -го порядка, так как лишь их близость позволяет сделать заключение о достоверности решения  $n$ -го порядка. Поэтому, строго говоря, модели четвертого порядка точности позволяют получить правильное решение лишь с третьим порядком, третьего – со вторым и т.д.

В большинстве существующих моделей первой группы пузырьки, как правило, считаются чисто сферическими. Вместе с тем, результатом взаимодействия может быть не только указанное выше сближение и удаление пузырьков или формирование из них связанного кластера, но и деформация пузырьков. Большие деформации могут привести к разрушению пузырьков. При разрушении каких-либо пузырьков в группе свойства всей группы могут существенно измениться. Поэтому деформацию пузырьков следует учитывать, иначе полученные теоретические предсказания их поведения могут оказаться неверными.

Таким образом, построение относящихся к первой группе математических моделей взаимодействия близко расположенных друг к другу пузырьков («близкого» взаимодействия) в акустическом поле с учетом деформаций их поверхностей является весьма **актуальным**.

**Цель работы.** Целью работы является построение, верификация и апробация математических моделей взаимодействия близко расположенных друг к другу газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле с учетом малых деформаций их поверхностей.

**Научная новизна работы.** Научная новизна диссертации состоит в следующем.

1. Разработаны математические модели близкого взаимодействия слабонесферических пузырьков в виде систем ОДУ второго порядка относительно радиусов пузырьков, координат их центров и амплитуд отклонений их формы от сферической и первого порядка для температур газа в пузырьках с учетом влияния вязкости и сжимаемости жидкости, теплообмена между жидкостью и пузырьками.

2. Предложена методика численного решения соответствующих задач, включающая метод последовательных приближений для решения систем линейных уравнений относительно коэффициентов представления потенциала скорости в виде ряда по полиномам Лежандра и метод Дормана-Принса для решения систем ОДУ.

3. Обнаружены режимы взаимодействия пузырьков, при которых их радиальные колебания, пространственные перемещения и деформации не зависят от предыстории взаимодействия. Выявлено, что при дорезонансном возбуждении радиальные колебания взаимодействующих пузырьков и их пространственные перемещения могут быть слабо зависящими от деформаций пузырьков. Показана возможность взаимодействия несферических пузырьков с образованием связанных пар и троек.

**Научная и практическая ценность работы.** Предложенные в работе математические модели и метод расчета динамики пузырьков могут быть использованы для проведения детальных исследований радиальных колебаний, пространственных перемещений и малых деформаций близко расположенных друг к другу пузырьков. Они могут применяться также для оценки взаимовлияния пузырьков в кластере. Их можно применять при планировании экспериментальных исследований взаимодействия пузырьков, для изучения циклических нагрузок при кавитационном воздействии на жесткие стенки. Предложенные математические модели и метод расчета можно использовать для получения эталонных решений при тестировании более сложных методов расчета взаимодействия пузырьков.

**Достоверность результатов работы.** Достоверность результатов диссертации обеспечивается корректностью постановки задачи, согласо-

нием результатов расчетов с экспериментальными данными, численными решениями других авторов, численными решениями, полученными автором с применением других математических моделей.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на: Научной конференции «Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук» (Зеленодольск, 2006); Российской конференции «Механика и химическая физика сплошных сред» (Бирск, 2007); VI и VII Молодежных научных школах-конференциях «Лобачевские чтения» (Казань, 2007, 2008); VII и VIII Всероссийских семинарах «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Казань, 2008); XXVIII и XXIX Научных конференциях молодых ученых и специалистов ТГГПУ (Казань, 2008, 2009); Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 2008); VI Всероссийской школе-семинаре молодых ученых и специалистов акад. РАН В.Е. Алемасова «Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении» (Казань, 2008); Российском симпозиуме "Динамика многофазных сред", посвященном 50-летию чл.-корр. РАН Д.А. Губайдуллина (Казань, 2008); Итоговых научных конференциях ИММ КазНЦ РАН за 2007, 2008 г. Работа в целом была заслушана на семинаре ИММ КазНЦ РАН под руководством чл.-корр. РАН Д.А. Губайдуллина.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 8 статей и 2 тезисов. Список публикаций приводится в конце автореферата.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, содержащих 26 параграфов, и заключения. Изложена на 160 страницах, включающих 31 рисунок и список литературы из 167 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, указаны цель работы, новизна, представлено краткое содержание ее разделов.

В **первой главе** дается краткий обзор существующих моделей и методов расчета задач взаимодействия газовых пузырьков в жидкости. Делается вывод, что экономичные модели и методы расчета взаимодействия слабонесферических пузырьков развиты недостаточно.

Во **второй главе** даются физическая и математическая постановки задач взаимодействия пузырьков. Приводится вывод уравнений основной из предлагаемых в работе моделей. Излагается методика численного решения.

Полагается, что в процессе взаимодействия центры пузырьков всегда находятся на оси  $z$ . При этом в терминах потенциала скорости жидкости  $\Phi = \Phi(r_i, \theta_i, \varphi_i, t)$ , где  $t$  – время,  $r_i, \theta_i, \varphi_i$  – сферическая система координат с началом отсчета в центре  $i$ -го пузырька,  $i = 1, 2, \dots, K$  ( $K$  – число пузырьков), уравнения динамики жидкости имеют вид

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathbf{w}_i \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho_0} = \frac{p_\infty}{\rho_0}. \quad (1)$$

Здесь  $p$  и  $p_\infty$  – давление жидкости в произвольной точке и на бесконечности соответственно,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $\mathbf{w}_i$  – скорость смещения центра  $i$ -го пузырька,  $\mathbf{w}_i = \dot{z}_i \mathbf{k}$ ,  $z_i$  – координата центра  $i$ -го пузырька,  $\mathbf{k}$  – единичный вектор оси  $z$ , точка сверху означает дифференцирование по  $t$ .

Давление газа в  $i$ -м пузырьке изменяется по закону

$$p_i = p_{i0} \left( \frac{V_{0i}}{V_i} \right)^{\Gamma_i}, \quad (2)$$

где  $p_i$  и  $p_{i0}$  – текущее и начальное давление газа в пузырьке, а  $V_i$  и  $V_{0i}$  – текущий и начальный объемы пузырька соответственно. Для изотермического пузырька  $\Gamma_i = 1$ , а для адиабатического  $\Gamma_i = \kappa$ , где  $\kappa$  – показатель адиабаты газа.

Кинематические условия на поверхностях пузырьков записываются в виде

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} - \mathbf{w}_i \cdot \nabla F_i + \nabla \Phi \cdot \nabla F_i = 0, \quad (3)$$

а динамические – в виде

$$p = p_i - 2H_i \sigma, \quad (4)$$

где  $F_i(r_i, \theta_i, \varphi_i, t) = 0$  – уравнение поверхности  $i$ -го пузырька,  $2H_i$  – ее средняя кривизна,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Давление жидкости на удалении от пузырьков  $p_\infty$  изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t, \quad (5)$$

где  $p_0$  – статическое давление,  $\Delta p$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота колебаний.

Уравнения (1)-(5) применяются и для описания взаимодействия пузырьков около жесткой плоской стенки в случае, когда ось  $z$  ортогональна к стенке. Задача взаимодействия  $K$  пузырьков у стенки тогда сводится к задаче (1)-(5) взаимодействия  $2K$  пузырьков, в которой к  $K$  реальным пузырькам добавляются, используя метод отражения,  $K$  фиктивных.

Уравнение поверхности  $i$ -го пузырька принимается в виде

$$F_i(r_i, \theta_i, t) = r_i - R_i(t) - \sum_{n=2}^{\infty} a_{ni}(t) P_n(\cos \theta_i) = 0. \quad (6)$$

Здесь  $R_i$  – радиус пузырька,  $a_{ni}$  – амплитуда отклонения его формы от сферической в виде  $P_n(\cos \theta_i)$ ,  $P_n$  – полином Лежандра степени  $n$ . В работе деформации пузырьков считаются малыми, так что величинами порядка  $\varepsilon_{ni}^2$  можно пренебречь, где  $\varepsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$  – искажение формы пузырька.

В окрестности  $i$ -го пузырька (при  $r_i < d_{ij}$ ,  $d_{ij} = |z_i - z_j|$ ,  $i \neq j$ ) потенциал скорости жидкости  $\Phi$  представляется в виде ряда

$$\Phi(r_i, \theta_i, t) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma i}(t) P_{\gamma i}(\cos \theta_i)}{r_i^{\gamma+1}} + \sum_{j=1, j \neq i}^K \sum_{\gamma, \varsigma=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma \varsigma} B_{\gamma j}(t) r_i^{\varsigma} P_{\varsigma i}(\cos \theta_i)}{s_{ij}^{\gamma+\varsigma} d_{ij}^{\gamma+\varsigma+1}(t)}, \quad (7)$$

где  $C_{\gamma \varsigma} = (-1)^{\varsigma} (\gamma + \varsigma)! / (\gamma! \varsigma!)$ ,  $s_{ij} = 1$  при  $z_i > z_j$ ,  $s_{ij} = -1$  при  $z_i < z_j$ .

Подставив  $F_i(r_i, \theta_i, t)$  из (6) и  $\Phi(r_i, \theta_i, t)$  из (7) в (3) и воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, можно получить

$$B_{\varrho i} = -\frac{R_i^{\varrho+2}}{\varrho+1} \left[ \dot{R}_i \alpha_{00\varrho} + \dot{z}_i \alpha_{10\varrho} + \dot{a}_{mi} \alpha_{m0\varrho} - \beta_{m1\varrho} \dot{z}_i \varepsilon_{mi} - \frac{\bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma+1, \gamma+2} B_{\gamma i} \varepsilon_{mi}}{R_i^{\gamma+2}} - \sum_{j=1, j \neq i}^K \frac{C_{\gamma \varsigma} B_{\gamma j} R_i^{\varsigma-1}}{s_{ij}^{\gamma+\varsigma} d_{ij}^{\gamma+\varsigma+1}} (\varsigma \alpha_{\varsigma 0\varrho} + \bar{\Theta}_{m\varsigma\varrho}^{\varsigma, \varsigma-1} \varepsilon_{mi}) \right], \quad (8)$$

где  $\varrho = 0, 1, \dots$ ,

$$\alpha_{\zeta\vartheta\varrho} = \frac{2\varrho+1}{2} \int_{-1}^1 P_{\zeta} P_{\vartheta} P_{\varrho} d\eta, \quad \beta_{\zeta\vartheta\varrho} = \frac{2\varrho+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P'_{\zeta} P'_{\vartheta} P_{\varrho} d\eta,$$

$\bar{\Theta}_{\zeta\vartheta\varrho}^{\gamma, \varsigma} = \gamma \varsigma \alpha_{\zeta\vartheta\varrho} - \beta_{\zeta\vartheta\varrho}$ , в подынтегральных выражениях аргументом полиномов Лежандра является  $\eta$ . В (8) и далее по повторяющимся греческим индексам предполагается суммирование от 0 до  $\infty$ , а по повторяющимся латинским индексам (кроме  $i$  и  $j$ ) – от 2 до  $\infty$ .



Выразив давление из (1), подставив его в (4) и приняв во внимание, что  $2H_i = [2 + (n-1)(n+2)\varepsilon_{ni}P_{ni}]/R_i$ , на поверхности  $i$ -го пузырька можно получить выражение, подстановка в которое потенциала (7) с учетом ортогональности полиномов Лежандра дает следующее соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\dot{B}_{\varrho i}}{R_i^{\varrho+1}} = & -\frac{\alpha_{00\varrho}(p_i - p_\infty)}{\rho_0} + \frac{\sigma}{\rho_0 R_i} [2\alpha_{00\varrho} + (m-1)(m+2)\alpha_{m0\varrho}\varepsilon_{mi}] - \\ & - \frac{B_{\gamma i} \dot{z}_i}{R_i^{\gamma+2}} \left( \bar{\Theta}_{\gamma 1 \varrho}^{1, \gamma+1} - \bar{\Upsilon}_{m \gamma 1 \varrho}^{\gamma+2, \gamma+1, 1} \varepsilon_{mi} \right) - \frac{B_{\gamma i} B_{\zeta i}}{2R_i^{\gamma+\zeta+4}} \left( \Theta_{\gamma \zeta \varrho}^{\gamma+1, \zeta+1} - \Upsilon_{m \gamma \zeta \varrho}^{\gamma+\zeta+4, \gamma+1, \zeta+1} \varepsilon_{mi} \right) + \\ & + \frac{(\gamma+1)\alpha_{m\gamma\varrho} \dot{B}_{\gamma i} \varepsilon_{mi}}{R_i^{\gamma+1}} + \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[ \frac{C_{\gamma\zeta} B_{\gamma j} R_i^{\zeta-1} \dot{z}_i}{s_{ij}^{\gamma+\zeta} d_{ij}^{\gamma+\zeta+1}} \left( \Theta_{\zeta 1 \varrho}^{\zeta, 1} + \Upsilon_{m \zeta 1 \varrho}^{\zeta-1, \zeta, 1} \varepsilon_{mi} \right) - \right. \\ & - \left( \dot{B}_{\gamma j} - \frac{(\gamma+\zeta+1)B_{\gamma j} \dot{d}_{ij}}{d_{ij}} \right) \frac{C_{\gamma\zeta} R_i^{\zeta}}{s_{ij}^{\gamma+\zeta} d_{ij}^{\gamma+\zeta+1}} (\alpha_{\zeta 0 \varrho} + \zeta \alpha_{m\zeta\varrho} \varepsilon_{mi}) + \\ & + \frac{C_{\zeta\varsigma} B_{\gamma i} B_{\zeta j}}{s_{ij}^{\zeta+\varsigma} R_i^{\gamma-\varsigma+3} d_{ij}^{\zeta+\varsigma+1}} \left( \bar{\Theta}_{\gamma \varsigma \varrho}^{\gamma+1, \varsigma} - \bar{\Upsilon}_{m \gamma \varsigma \varrho}^{\gamma-\varsigma+3, \gamma+1, \varsigma} \varepsilon_{mi} \right) - \\ & \left. - \frac{C_{\gamma\varsigma} C_{\zeta\vartheta} B_{\gamma j} B_{\zeta j} R_i^{\varsigma+\vartheta-2}}{2s_{ij}^{\gamma+\zeta+\varsigma+\vartheta} d_{ij}^{\gamma+\zeta+\varsigma+\vartheta+2}} \left( \Theta_{\varsigma \vartheta \varrho}^{\varsigma, \vartheta} + \Upsilon_{m \varsigma \vartheta \varrho}^{\varsigma+\vartheta-2, \varsigma, \vartheta} \varepsilon_{mi} \right) \right] - \frac{\psi_{\varrho i}}{\varrho+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\varphi_{m\zeta\vartheta\varrho} = \frac{2\varrho+1}{2} \int_{-1}^1 P_m P_\zeta P_\vartheta P_\varrho d\eta, \quad \chi_{m\zeta\vartheta\varrho} = \frac{2\varrho+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P_m P'_\zeta P'_\vartheta P_\varrho d\eta.$$

$\Theta_{\zeta\vartheta\varrho}^{\gamma, \varsigma} = \gamma\varsigma\alpha_{\zeta\vartheta\varrho} + \beta_{\zeta\vartheta\varrho}$ ,  $\Upsilon_{m\zeta\vartheta\varrho}^{\gamma, \varsigma, \epsilon} = \gamma(\varsigma\epsilon\varphi_{m\zeta\vartheta\varrho} + \chi_{m\zeta\vartheta\varrho})$ ,  $\bar{\Upsilon}_{m\zeta\vartheta\varrho}^{\gamma, \varsigma, \epsilon} = \gamma(\varsigma\epsilon\varphi_{m\zeta\vartheta\varrho} - \chi_{m\zeta\vartheta\varrho})$ ,  $\varrho = 0, 1, \dots$ . Параметры  $\psi_{\varrho i}$  – это поправки на вязкость жидкости.

Продифференцировав уравнения (8) по времени и полагая последовательно  $\varrho = 0, 1, 2, \dots$ , придем к системе ОДУ следующего вида

$$\ddot{R}_i = \tilde{F}_{0i}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \psi_{0i} + \Delta_{0i}, \quad \ddot{z}_i = \tilde{F}_{1i}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \psi_{1i}, \quad \ddot{a}_{ni} = \tilde{F}_{ni}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \psi_{ni}. \quad (10)$$

где  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_K)$ ,  $\mathbf{a}_i = (R_i, z_i, a_{2i}, a_{3i}, \dots, B_{0i}, B_{1i}, \dots)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Параметр  $\Delta_{0i}$  – это поправка на сжимаемость жидкости. Коэффициенты  $B_{\gamma i}$  правой части (10) находятся из (8), а их производные  $\dot{B}_{\gamma i}$  – из (9).

Для поправок на вязкость жидкости получено следующее выражение

$$\psi_{\varrho i} = 2(\varrho+1)\nu \left\{ \frac{(\gamma^2 + 3\gamma + 2)B_{\gamma i}}{R_i^{\gamma+3}} \left[ \alpha_{\gamma 0 \varrho} - \left( (\gamma+3)\alpha_{m\gamma\varrho} - \frac{2\beta_{m\gamma\varrho}}{\gamma+1} \right) \varepsilon_{mi} \right] + \right.$$

$$+ \sum_{j=1, j \neq i}^K \frac{\varsigma(\varsigma-1)C_{\gamma\varsigma}B_{\gamma j}R_i^{\varsigma-2}}{s_{ij}^{\gamma+\varsigma}d_{ij}^{\gamma+\varsigma+1}} \left[ \alpha_{\varsigma 0 \varrho} + \left( (\varsigma-2)\alpha_{m\varsigma\varrho} - \frac{2\beta_{m\varsigma\varrho}}{\varsigma} \right) \varepsilon_{mi} \right] \Big\} \quad (11)$$

а для поправки на ее сжимаемость – следующее

$$\Delta_{0i} = \frac{\dot{R}_i}{c_0} \left( R_i \ddot{R}_i + \frac{\dot{R}_i^2}{2} + \frac{\dot{z}_i^2}{4} + \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} \right) + \frac{R_i}{c_0} \left( \frac{\dot{z}_i \ddot{z}_i}{2} + \frac{\dot{p}_i - \dot{p}_\infty}{\rho_0} \right). \quad (12)$$

В (11)  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, а в (12)  $c_0$  – скорость звука в жидкости.

Если необходим более точный, чем при  $\Gamma_i = 1$  и  $\Gamma_i = \kappa$ , учет влияния теплообмена между жидкостью и пузырьками, то используется известная зависимость показателя политропы  $\Gamma_i$  от числа Пекле  $Pe_i$ . В этом случае давление газа в  $i$ -м пузырьке изменяется по закону

$$p_i = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0,i}} \right) \left( \frac{R_{0,i}}{R_i} \right)^3 \frac{T_i}{T_0}, \quad (13)$$

а температура газа  $T_i$  находится из уравнения

$$\dot{T}_i = \frac{3(1-\Gamma_i)\dot{R}_i T_i}{R_i} + \frac{3\chi_i(T_0 - T_i)}{R_i^2}. \quad (14)$$

Здесь  $T_0$  – температура жидкости,  $\chi_i = \lambda_i/(\rho_i c_v)$ ,  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности газа,  $c_v$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $\rho_i$  – плотность газа.

Система ОДУ (10), (14) совместно с (8), (9), (11)-(13) и представляет собой основную предлагаемую в настоящей работе модель взаимодействия слабонесферических пузырьков. Она, в отличие от существующих моделей, имеет произвольный порядок точности по  $\delta$ , что позволяет применять ее для изучения произвольно близкого взаимодействия пузырьков.

Решение уравнений (10), (14) находится численно с точностью  $M \geq 2$  относительно  $\delta$  при заданных в начальный момент времени значениях  $R_i$ ,  $z_i$ ,  $a_{ni}$ ,  $\dot{R}_i$ ,  $\dot{z}_i$ ,  $\dot{a}_{ni}$ ,  $T_i$  ( $n = 2, 3, \dots, N$ ,  $N$  – число используемых в (6) гармоник). При этом на каждом временном шаге выполняются три этапа:

(i) определение коэффициентов  $B_{\gamma i}$  из уравнений (8) при  $\varrho = 0, 1, \dots, M'$ , где  $M' = M + N - 1$ . Для этого применяется один из вариантов метода последовательных приближений по  $\delta$  и  $\varepsilon$  (излагается в третьей главе);

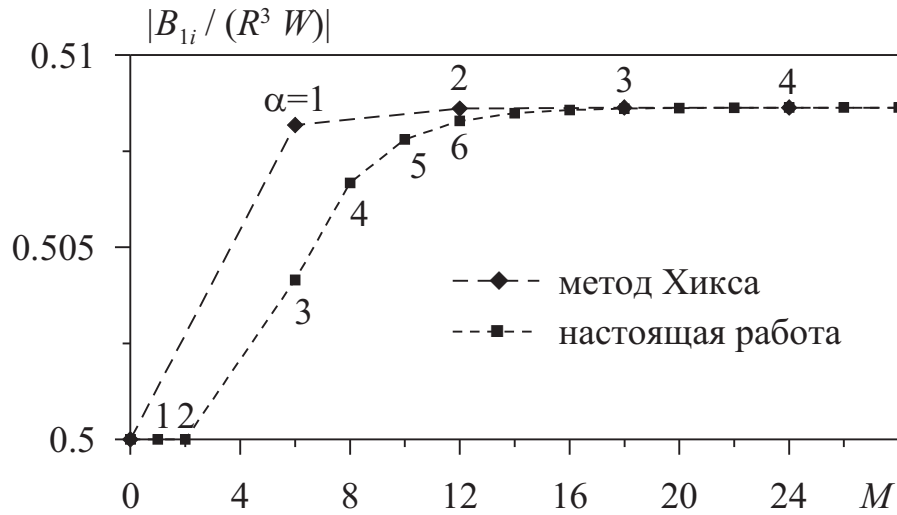


Рис. 1. Зависимости  $|B_{1i}/(R^3 W)|$  от порядка точности  $M$  решения задачи о движении идеальной жидкости при наличии в ней двух сферических тел ( $\alpha$  – число итераций, выполненное при расчете данной точки).

- (ii) определение производных  $\dot{B}_{\gamma i}$  из уравнений (9) при  $\varrho = 0, 1, \dots, N$  и уравнений, получаемых дифференцированием выражений (8) при  $\varrho = N + 1, N + 2, \dots, M'$  (применяется тот же способ, что и на первом этапе);
- (iii) решение системы ОДУ (10), (14) высокоточным методом Дормана-Принса с автоматическим выбором шага интегрирования по времени.

**Третья глава** посвящена моделированию взаимодействия сферических пузырьков. Она начинается с вывода аналогичных (10) уравнений взаимодействия произвольного порядка точности относительно параметра  $\delta$ . Их правые части также зависят от неизвестных коэффициентов  $B_{\gamma i}$  и их производных  $\dot{B}_{\gamma i}$ . Кроме того, путем исключения из них  $B_{\gamma i}$  и  $\dot{B}_{\gamma i}$  получены более удобные для применения, но имеющие лишь пятый порядок точности, уравнения взаимодействия пузырьков в терминах их радиусов и координат центров. Подобные соотношения от второго до четвертого порядков обычно и применяются в литературе.

Способ определения  $B_{\gamma i}$  и  $\dot{B}_{\gamma i}$  упрощенным методом последовательных приближений подробно излагается для случая двух сферических пузырьков. Для тестирования данного метода используется задача о движении идеальной жидкости при наличии в ней двух сферических тел ( $i$ -го и  $j$ -го), одно из которых неподвижно, а другое перемещается к нему с постоянной скоростью  $W$ . На рис. 1 приводится сравнение зависимостей безразмерно-

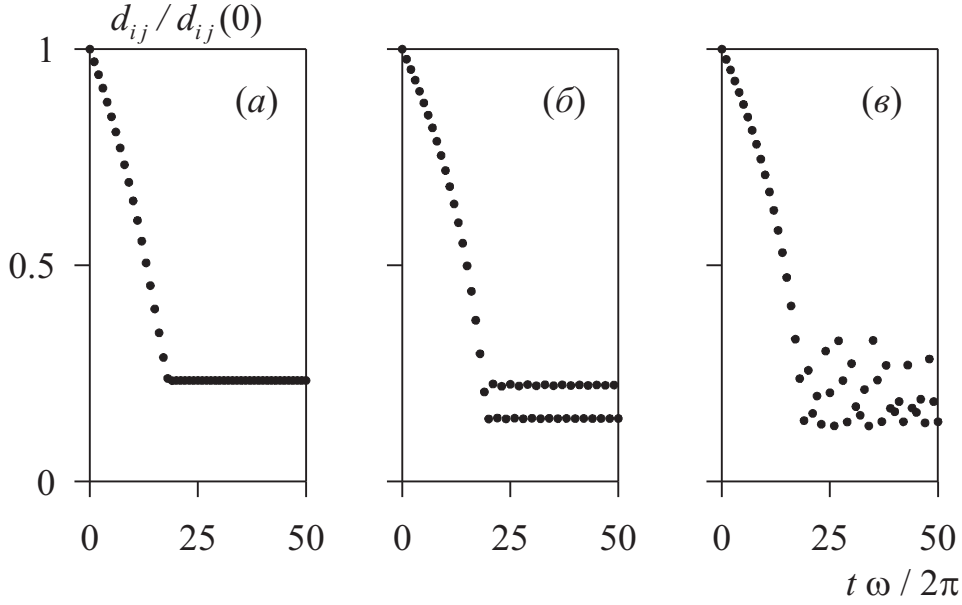


Рис. 2. Изменение безразмерного расстояния между центрами взаимодействующих пузырьков в начале каждого периода колебаний давления окружающей жидкости.

го параметра  $|B_{1i}/(R^3W)|$  от  $M$  – порядка точности решения относительно  $\delta$ , полученных предлагаемым способом и классическим методом Хикса в случае  $R_i = R_j = R$ ,  $\dot{z}_i = W$ ,  $\dot{z}_j = 0$ ,  $\delta = 0.9$ . Видно, что с увеличением порядка точности оба решения сходятся к одному и тому же результату, что свидетельствует о правильности работы предлагаемого способа. Скорость сходимости метода Хикса выше, однако в настоящей работе он не используется, т.к. при неизвестных  $\dot{R}_i$  и  $\dot{z}_i$  оказывается неприменимым.

Верификация предлагаемых математических моделей и метода расчета задач взаимодействия сферических пузырьков производится путем сравнения результатов решения задач взаимодействия пузырьков, полученных с применением разных моделей, как между собой, так и с тем, что имеется в литературе. В обоих случаях достигнуто хорошее согласование.

Рассмотрены примеры взаимодействия двух сферических воздушных пузырьков в воде при комнатных условиях, когда  $\Delta p = 1.2$  бар,  $\omega/2\pi = 20$  кГц. В начале взаимодействия скорости радиальных колебаний и пространственных смещений центров пузырьков равны нулю.

Рис. 2 иллюстрирует три возможных сценария взаимодействия с образованием связанной пары. Точками показана величина относительного расстояния между пузырьками  $d_{ij}/d_{ij}(0)$  в начале каждого очередного

периода колебаний давления жидкости  $p_\infty$ . Видно, что в первом примере ((a), при  $t = 0$ :  $R_i = 2.5$  мкм,  $R_j = 4.5$  мкм,  $d_{ij} = 300$  мкм) период пространственных колебаний пузырьков в паре совпадает с периодом колебаний давления жидкости (из точек образуется одна горизонтальная прямая), во втором ((б), при  $t = 0$ :  $R_i = 3$  мкм,  $R_j = 4.2$  мкм,  $d_{ij} = 600$  мкм) – превышает его в два раза (из точек образуются две горизонтальные прямые), а в третьем ((в), при  $t = 0$ :  $R_i = 3.3$  мкм,  $R_j = 4.8$  мкм,  $d_{ij} = 700$  мкм) – изменяется аperiodически (точки не упорядочены). Показано, что в этих примерах начало взаимодействия можно правильно описывать с 3-м порядком точности относительно параметра  $\delta$  ( $M = 3$ ). Однако в дальнейшем для получения достоверных результатов порядок точности нужно увеличивать до  $M = 5$  (a), 6 (б) и 16 (в).

**Четвертая глава** посвящена моделированию взаимодействия слабо-несферических пузырьков. Она начинается с вывода упрощенной модели взаимодействия, имеющей четвертый порядок точности по  $\delta$ , что на два порядка выше, чем у аналогичных существующих,

$$\begin{aligned}
R_i \ddot{R}_i + \frac{3\dot{R}_i^2}{2} - \frac{\dot{z}_i^2}{4} - \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[ \frac{\dot{B}_{0j}}{d_{ij}} - \frac{R_j^3 \ddot{z}_j - B_{0j} \dot{z}_i - 5B_{0j} \dot{z}_j}{2s_{ij} d_{ij}^2} - \right. \\
\left. - \frac{R_j^3 \dot{z}_j (\dot{z}_i + 2\dot{z}_j)}{2d_{ij}^3} + \frac{2(B_{0i} R_j^3)' + 3B_{0j}^2}{4d_{ij}^4} + \frac{3(R_j^2 \dot{z}_j a_{2j})'}{10s_{ij} d_{ij}^2} \right] + \psi_{0i} + \Delta_{0i}, \\
\left(1 - \frac{7\varepsilon_{2i}}{5}\right) R_i \ddot{z}_i + 3 \left(1 - \frac{4\varepsilon_{2i}}{5}\right) \dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{9\dot{z}_i \dot{a}_{2i}}{5} - \frac{9\bar{\Theta}_{m12}^{1,3} \dot{z}_i^2 \varepsilon_{mi}}{5} = \\
= \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[ -\frac{3(B_{0j} R_i)'}{s_{ij} d_{ij}^2} + \frac{3(R_i R_j^3 \dot{z}_j)'}{d_{ij}^3} - \frac{6B_{0j} R_i \dot{z}_j}{s_{ij} d_{ij}^4} + \frac{9R_i R_j^3 \dot{z}_j^2}{s_{ij} d_{ij}^4} + \right. \\
\left. + \frac{3(4B_{0j} \dot{R}_i \varepsilon_{2i} + \dot{B}_{0j} a_{2i} + 3B_{0j} \dot{a}_{2i})}{5s_{ij} d_{ij}^2} + \frac{18\bar{\Theta}_{m12}^{1,3} B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{5s_{ij} d_{ij}^2} \right] + \psi_{1i}, \\
\frac{1}{n+1} \left[ R_i \ddot{a}_{ni} + 3\dot{R}_i \dot{a}_{ni} - (n-1) \ddot{R}_i a_{ni} - \frac{3\bar{\Theta}_{m1n}^{2/3, n-2} \ddot{z}_i a_{mi}}{2} + \frac{3\bar{\Theta}_{m1n}^{1,2} \dot{z}_i \dot{a}_{mi}}{2} \right] + \\
+ \frac{9\alpha_{11n} \dot{z}_i^2}{8} - \frac{9\dot{z}_i^2 \varepsilon_{mi}}{4} \left( \frac{\beta_{\gamma 1n} \bar{\Theta}_{m1\gamma}^{1,2}}{\gamma + 1} - \chi_{m11n} \right) - \frac{3\beta_{m1n} \dot{z}_i (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi})}{2(m+1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(n-1)(n+2)\sigma\varepsilon_{ni}}{\rho_0 R_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[ \frac{9\beta_{11n} B_{0j} \dot{z}_i}{4s_{ij} d_{ij}^2} - \frac{9\beta_{11n} R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4d_{ij}^3} - \frac{5\beta_{21n} R_i B_{0j} \dot{z}_i}{2d_{ij}^3} + \right. \\
& + \frac{9\beta_{11n} B_{0j}^2}{8d_{ij}^4} + \frac{15\beta_{21n} R_i R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4s_{ij} d_{ij}^4} + \frac{21\beta_{31n} R_i^2 B_{0j} \dot{z}_i}{8s_{ij} d_{ij}^4} + \frac{(2n+1)(R_i^n B_{0j})'}{(n+1)(-s_{ij})^n d_{ij}^{n+1}} + \\
& + \frac{(2n+1) \left[ (R_i^n R_j^3 \dot{z}_j)' + 2R_i^n B_{0j} (\dot{z}_i - \dot{z}_j) \right]}{2(-s_{ij})^{n+1} d_{ij}^{n+2}} + \frac{9\alpha_{11n} B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{2i}}{10s_{ij} d_{ij}^2} - \frac{3\bar{\Theta}_{m1n}^{1,2} (B_{0j} a_{mi})'}{2s_{ij} (n+1) d_{ij}^2} + \\
& + \frac{\Theta_{m1n}^{2,m+1} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi}) B_{0j}}{2s_{ij} (m+1) d_{ij}^2} + \frac{3B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{2s_{ij} d_{ij}^2} \left( \frac{2\Theta_{\gamma 1n}^{1/2, \gamma+1} \bar{\Theta}_{m1n}^{1,2}}{\gamma+1} - 3\chi_{m11n} \right) \Big] + \psi_{ni},
\end{aligned}$$

где  $n = 2, 3, \dots$ , по индексам  $i$  и  $n$  суммирование отсутствует.

Давление газа  $p_i$  здесь определяется равенствами (13) или (2), поправки на сжимаемость жидкости  $\Delta_{0i}$  – равенствами (12), а поправки на ее вязкость с соответствующей точностью имеют вид

$$\begin{aligned}
\psi_{0i} &= -\frac{4\nu \dot{R}_i}{R_i}, \quad \psi_{1i} = -\frac{12\nu}{R_i} \left( \dot{z}_i - \varepsilon_{2i} \dot{z}_i + \frac{B_{0j}}{s_{ij} d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j}{d_{ij}^3} - \frac{B_{0j} \varepsilon_{2i}}{s_{ij} d_{ij}^2} \right), \\
\psi_{ni} &= -\frac{2\nu}{R_i} \left[ (n+2) \dot{a}_{ni} + 2(n-1) \dot{R}_i \varepsilon_{ni} + \frac{3n \bar{\Theta}_{m1n}^{2/n, n-2} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{n(2n+1) R_i^{n-1} B_{0j}}{(-s_{ij})^n d_{ij}^{n+1}} - \frac{n(n+1)(2n+1) R_i^{n-1} R_j^3 \dot{z}_j}{2(-s_{ij})^{n+1} d_{ij}^{n+2}} + \frac{3n \bar{\Theta}_{m1n}^{2/n, n-2} B_{0j} \varepsilon_{mi}}{2s_{ij} d_{ij}^2} \right].
\end{aligned}$$

Из уравнений взаимодействия двух пузырьков, используя метод отражения, получены уравнения динамики отдельного пузырька у плоской жесткой стенки, имеющие четвертый порядок точности по  $\delta$ .

Для верификации модели и метода расчета задач взаимодействия слабонесферических пузырьков использовано известное в литературе, хорошо согласующееся с экспериментальными данными, решение задачи о схлопывании кавитационного пузырька около плоской жесткой стенки, полученное конечно-разностным методом (рис. 3). Входные данные задачи:  $p_0 - p_b = 1$  бар ( $p_b$  – давление в пузырьке),  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $c_0 = \infty$ ,  $R(0) = 1$  мм,  $z_c(0) = 1.5$  мм,  $a_n(0) = 0$ ,  $\dot{R}(0) = \dot{z}_c(0) = \dot{a}_n(0) = 0$ .

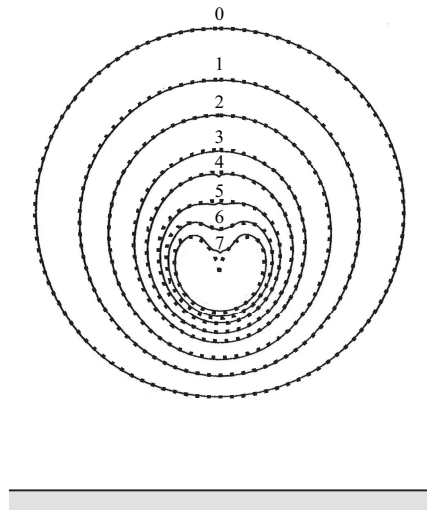


Рис. 3. Изменение формы пузырька при его схлопывании около стенки. Сплошные кривые – решение методом конечных разностей, штриховые кривые – расчет по методике настоящей работы. Цифрами указаны моменты времени.

Из рис. 3 видно, что до момента 6 имеет место удовлетворительное согласование результатов. Далее наблюдается значительное расхождение, что естественно, т.к. деформации поверхности пузырька уже не малы.

Применимость предлагаемых моделей взаимодействия слабонесферических пузырьков иллюстрируется на ряде задач взаимодействия двух воздушных пузырьков в воде при комнатных условиях при  $\omega/2\pi = 20$  кГц. При  $t = 0$  пузырьки сферические, а скорости их радиальных колебаний, пространственных смещений центров и изменения амплитуды искажений равны нулю. При этом сначала рассматриваются три задачи предыдущей главы (рис. 2), но теперь с учетом несферичности пузырьков. Получено, что при учете деформаций пузырьков их взаимодействие во всех трех случаях завершается разрушением одного из них уже на первом периоде.

Далее рассмотрены все типичные сценарии взаимодействия двух пузырьков: притяжение и столкновение, притяжение и разрушение, притяжение и образование связанной пары, отталкивание. Основное внимание уделено оценке справедливости обычно используемого в литературе предположения о постоянной сферичности взаимодействующих пузырьков, поскольку, как следует из предыдущих примеров, такая гипотеза может дать и неверные сценарии взаимодействия.

Затем иллюстрируется применимость предлагаемой в настоящей рабо-

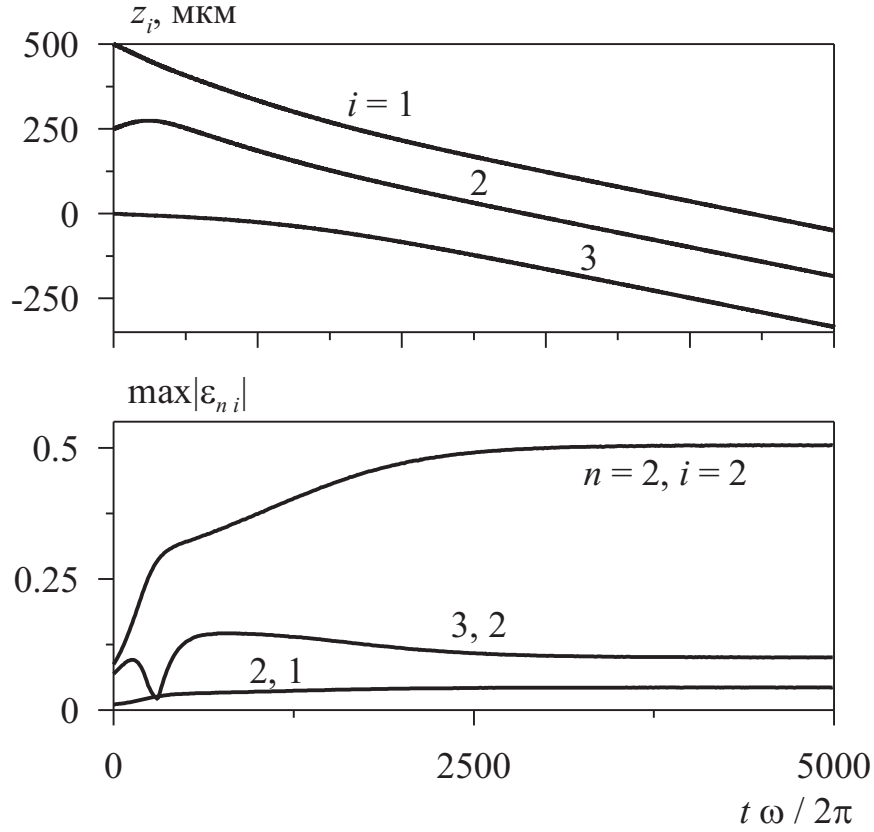


Рис. 4. Взаимодействие трех пузырьков: сверху – изменение пространственных координат центров пузырьков, снизу – изменение максимальных (за период колебаний  $p_\infty$ ) амплитуд некоторых искажений сферичности пузырьков (другие искажения малы).

те модели для описания взаимодействия пузырька с плоской твердой стенкой. При этом основное внимание уделяется изменению давления жидкости на поверхности стенки.

Для иллюстрации применения модели настоящей работы в случае, когда число взаимодействующих пузырьков больше двух, рассмотрены три примера взаимодействия трех воздушных пузырьков в воде при комнатных условиях при  $\Delta p = 1.2$  бар,  $\omega/2\pi = 20$  кГц. При  $t = 0$  пузырьки сферические, а скорости их радиальных колебаний, пространственных смещений центров и изменения амплитуды искажений равны нулю. В первом примере (рис. 4, 5) при  $t = 0$ :  $R_1 = 2.1$  мкм,  $R_2 = 3$  мкм,  $R_3 = 2$  мкм,  $d_{12} = d_{23} = 250$  мкм. Пузырьки, как видно из рис. 4, сближаются и формируют связанную тройку. Величина максимальных эллипсоидальных искажений ( $n = 2$ ) среднего пузырька ( $i = 2$ ) в тройке держится на уровне  $\max|\epsilon_{22}| = 0.5$ . Несмотря на столь высокий уровень деформаций взаи-



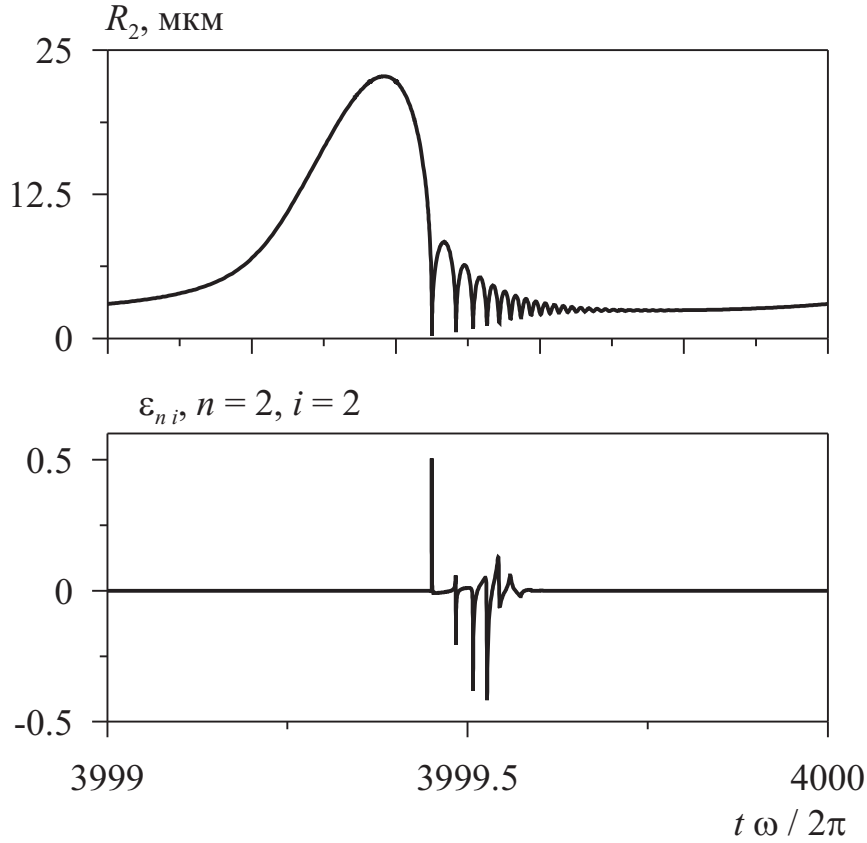


Рис. 5. Изменение радиуса и амплитуды эллипсоидального ( $n = 2$ ) искажения сферичности второго пузырька ( $i = 2$ ) при взаимодействии трех пузырьков в условиях рис. 4 в ходе 4000-го периода колебаний  $p_\infty$ .

модействие пузырьков от них не зависит: траектории центров пузырьков с учетом и без учета их несферичности отличаются незначительно. Это связано с тем, что немалые искажения возникают лишь в короткие промежутки времени (при быстром расширении-сжатии) и при малых размерах пузырьков (рис. 5). На стадии же медленного расширения-сжатия пузырьки в пространстве практически неподвижны, а отклонения их формы от сферической – пренебрежимо малы. На таком режиме колебаний взаимодействие пузырьков на последующем периоде не зависит от предыстории, а определяется лишь расстоянием между пузырьками.

Во втором и третьем примерах взаимодействия трех пузырьков демонстрируется зависимость сценария взаимодействия трех и более пузырьков от их начального положения. Во втором примере взаимодействие заканчивается разрушением одного из пузырьков в ходе его сближения с другими, а в третьем – образованием двумя из трех пузырьков связанной пары.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработана математическая модель близкого взаимодействия слабонесферических пузырьков с учетом влияния вязкости и сжимаемости жидкости, теплообмена между жидкостью и пузырьками. Это – система ОДУ второго порядка относительно радиусов пузырьков, координат их центров и амплитуд отклонений их формы от сферической и первого порядка для температур газа в пузырьках. В нее также входят явно не выраженные коэффициенты разложения потенциала скорости по полиномам Лежандра. В отличие от существующих моделей она имеет произвольный порядок точности относительно  $\delta$  (отношения суммы радиусов двух пузырьков к расстоянию между их центрами).

2. Получены уравнения взаимодействия: (а) одного слабонесферического пузырька с плоской жесткой стенкой, более двух (б, в) сферических и (г) слабонесферических пузырьков между собой, имеющие по  $\delta$  четвертый (а), пятый (б), произвольный (в) и четвертый (г) порядки точности. Эти уравнения либо точнее известных (б, в), либо более удобны для анализа и применения (а, г).

3. Предложена методика численного решения задач взаимодействия в рамках разработанных моделей, включающая метод последовательных приближений для решения систем линейных уравнений относительно коэффициентов представления потенциала скорости в виде ряда по полиномам Лежандра и метод Дормана-Принса для решения системы ОДУ.

4. Обнаружены режимы взаимодействия пузырьков, при которых их радиальные колебания, пространственные перемещения и деформации не зависят от предыстории взаимодействия.

5. Выявлено, что при дорезонансном возбуждении радиальные колебания взаимодействующих пузырьков и их пространственные перемещения могут быть слабо зависящими от деформаций пузырьков, что объясняется кратковременностью проявления немалых деформаций и малыми радиусами, при которых они возникают.

6. Установлена возможность взаимодействия несферических пузырьков с образованием связанных пар и троек. Показано, что с увеличением числа пузырьков возрастает зависимость сценариев их взаимодействия от их начального положения.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Аганин А.А. Динамика двух газовых пузырьков в жидкости / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук. Сборник докладов. Казань, 2006. С. 75-77.
2. Аганин А.А. Взаимодействие сферических газовых пузырьков в жидкости / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин, В.Г.Малахов // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 5. Уфа, 2007. С. 66-72.
3. Аганин А.А. Взаимодействие сферических газовых пузырьков в вязкой жидкости / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 36. Казань, 2007. С. 3-5.
4. Аганин А.А. Взаимодействие двух сферических газовых пузырьков в несжимаемой жидкости / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Материалы VII Всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». Казань, 2008. С. 8-9.
5. Аганин А.А. Математическая модель динамики двух сферических пузырьков / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды межд. конф. Т. 3. Уфа, 2008. С. 61-65.
6. Аганин А.А. Алгоритм решения задач взаимодействия пузырьков / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении: Мат. докл. Казань, 2008. С. 109-112.
7. Аганин А.А. Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости с учетом малых деформаций их поверхностей / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Материалы VIII Всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». Казань, 2008. С. 10-11.
8. Аганин А.А. Динамика газовых пузырьков в жидкости с малыми деформациями их поверхностей / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Труды Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 37. Казань, 2008. С. 7-10.
9. Аганин А.А. Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 6. С. 89-102.
10. Аганин А.А. Уточненная модель взаимодействия сферических газовых пузырьков в жидкости / А.А.Аганин, А.И.Давлетшин // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 9. С. 89-98.